

# Traitement des signaux déterministes - Transformée De Fourier

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

## Transformée de Fourier

### Définition

La transformée de Fourier d'une fonction  $f$  absolument intégrable est définie par :

$$\hat{f}(u) = F_u^-(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi ut} dt$$

C'est cette définition que l'on retiendra.

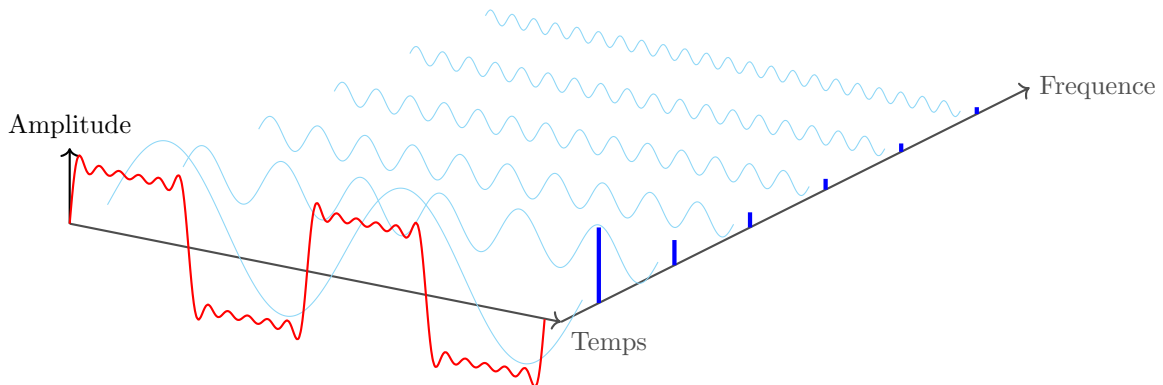
### Définition alternative

On peut aussi définir la transformée de Fourier par :

$$\hat{f}(u) = F_u^+(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi ut} dt$$

### Interprétation

Si  $f$  est un signal représenté de manière temporelle, alors  $\hat{f}$  est la représentation fréquentielle de  $f$ .  
Donc  $\hat{f}(u)$  représente l'amplitude de la fréquence  $u$  dans le signal  $f$ .



## Propriétés

### Linéarité

$$F_u^-(\alpha f + \beta g) = \alpha F_u^-(f) + \beta F_u^-(g)$$

### Translation

$$F_u^-(f(t - t_0)) = e^{-2i\pi u t_0} F_u^-(f)$$

### Modulation

$$F_u^-(e^{2i\pi u_0 t} f(t)) = \hat{f}(u - u_0)$$

### Dilatation

$$F_u^-(f(at)) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right)$$

### Conjugué complexe

$$F_u^-(\overline{f(t)}) = \overline{\hat{f}(-u)}$$

### Dérivation

$$F_u^-(f^{(n)}(t)) = (2i\pi u)^n \hat{f}(u)$$

### Multiplication par $x$

$$F_u^-((-2i\pi t)^n f(t)) = \frac{d^n}{du^n} \hat{f}(u)$$

### Convolution

$$F_u^-(f * g) = \hat{f}(u) \hat{g}(u)$$

## Impact sur les équations différentielles

$$f'' + f = g \iff [4\pi^2 u^2 + 1] \hat{f} = \hat{g}$$

## Transformée de Fourier inverse

### Définition

Si  $\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi u t} dt$ , alors :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) e^{2i\pi u t} du$$